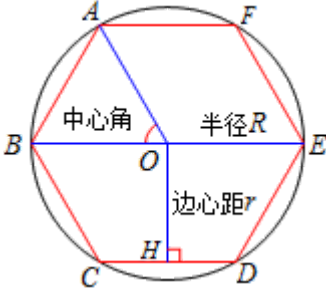
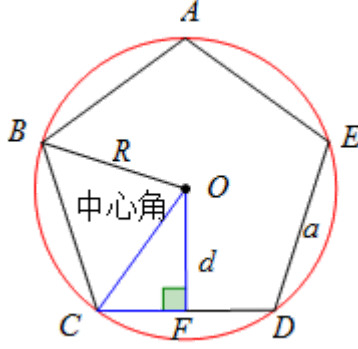
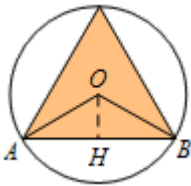
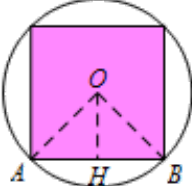
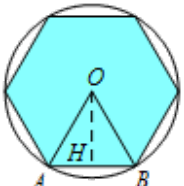


第3讲 正多边形和圆与圆中的计算

一、 正多边形和圆

圆内接正多边形概念 	顶点都在圆上的正多边形叫做圆的 <u>内接正多边形</u>，这个圆叫做这个正多边形的 <u>外接圆</u>。 正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的 <u>中心</u> 正多边形的外接圆的半径叫做正多边形的 <u>半径</u> 正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的 <u>中心角</u> 中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的 <u>边心距</u>
圆内接正多边形计算 	正 n 边形 中心角 的求法：中心角 = $\frac{360^\circ}{n}$。 正 n 边形的 每个内角 的求法：内角 = $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$。 正 n 边形的 每个外角 的求法：外角 = $\frac{360^\circ}{n}$。 正 n 边形的 边心距 的求法：边心距 $d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$。 正 n 边形的 面积 的求法： $S = \frac{1}{2}ld = \frac{1}{2}nad$。 ($l$ 是正多边形的周长，$l = na$)

半径为 R 的圆内接正多边形：

	正三角形	正方形	正六边形
图形			
中心角			
边心距			
边长			
边心距 : 半径 : 边长			
周长 C			
面积 S			

【备注】		正三角形	正方形	正六边形
	图形			
	中心角	120°	90°	60°
	边心距	$\frac{1}{2}R$	$\frac{\sqrt{2}}{2}R$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	边长	$\sqrt{3}R$	$\sqrt{2}R$	R
	边心距 : 半径 : 边长	$1 : 2 : 2\sqrt{3}$	$1 : \sqrt{2} : 2$	$\sqrt{3} : 2 : 2$
	周长 C	$3\sqrt{3}R$	$4\sqrt{2}R$	$6R$
	面积 S	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$	$2R^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

举个“栗子”

栗子1

1. 2017~2018学年12月天津河东区天津市第七中学初三上学期月考第10题 ★★

已知正三角形的边长为 a ，其内切圆的半径为 r ，外接圆的半径为 R ，则 $r : a : R$ 等于 () .

- A. $1 : 2\sqrt{3} : 2$ B. $1 : 2 : 2\sqrt{3}$ C. $1 : 2 : \sqrt{3}$ D. $1 : \sqrt{3} : 2$

【答案】 A

【解析】 等边三角形的一边上的高的 $\frac{1}{3}$ 倍为它的内切圆的半径，
等边三角形的一边上的高的 $\frac{2}{3}$ 倍为它的外接圆的半径，
而高又为边长的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍，
 $\therefore r : a : R = 1 : 2\sqrt{3} : 2$.
故选 A .

【标注】 【知识点】 三角形五心

2. 2018~2019学年10月天津和平区耀华嘉诚国际中学初三上学期月考第7题3分 ★★★

以半径为 2 的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则该三角形的面积是 () .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 如图 1 ,

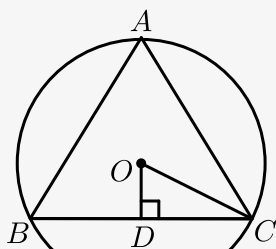


图 1

$$\because OC = 2 ,$$

$$\therefore OD = 2 \times \sin 30^\circ = 1 .$$

如图 2 ,

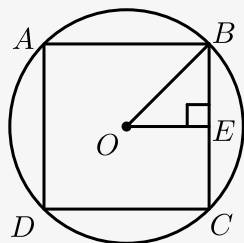
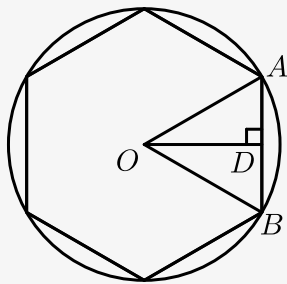


图 2

$$\because OB = 2 ,$$

$$\therefore OE = 2 \times \sin 45^\circ = \sqrt{2} .$$

如图 3 ,



$$\because OA = 2,$$

$$\therefore OD = 2 \times \cos 30^\circ = \sqrt{3},$$

则该三角形的三边分别为：1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,

$$\because (1)^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2,$$

$\therefore$ 该三角形是直角三角形,

$$\therefore \text{该三角形的面积是: } \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

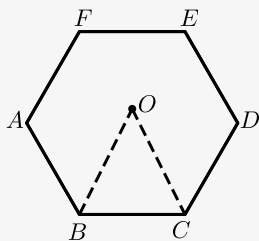
【标注】【知识点】圆内接正多边形相关计算

3. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期末第14题3分 ★

已知正六边形的半径是 3, 则这个正六边形的边长是 _____.

【答案】 3

【解析】 如图所示, 连接 OB 、 OC .



$\because$ 此六边形是正六边形,

$$\therefore \angle BOC = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ,$$

$$\because OB = OC = 3,$$

$\therefore \triangle BOC$ 是等边三角形,

$$\therefore OB = OC = BC = 3.$$

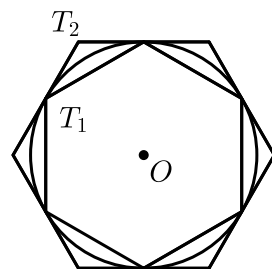
故答案为：3.

【标注】【知识点】正多边形的半径与边心距

4. 2017~2018学年12月天津天津市益中学校初三上学期月考第17题3分 ★★

T_1 、 T_2 分别为 $\odot O$ 的内接正六边形和外切正六边形, 设 $\odot O$ 的半径 r , T_1 、 T_2 的边长分别为 a 、 b , T_1 、 T_2 的面积分别为 S_1 、 S_2 , 下列结论：① $r : a = 3 : 4$ ；② $r : b = \sqrt{3} : 2$ ；③ $a : b = 1 : \sqrt{3}$ ；④

$S_1 : S_2 = 3 : 4$, 其中正确的 ____ . (填序号)



【答案】 ②④

【解析】 正六边形边长等于半径 , ①错误 ;

$$r : b = AO : BO = \sqrt{3} : 2 , \text{ ②正确 ;}$$

$$a : b = \frac{a}{r} \times \frac{r}{b} = \frac{1}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} : 2 , \text{ ③错误 ;}$$

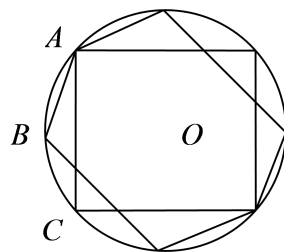
$$S_1 : S_2 = (a : b)^2 = (\sqrt{3} : 2)^2 = 3 : 4 , \text{ ④正确 .}$$

【标注】 【知识点】 正多边形与圆的综合

栗子2

5. 2018年天津红桥区初三毕业考试第16题3分 ★★★

如图 , AB 、 AC 分别为 $\odot O$ 的内接正六边形 , 内接正方形的一边 , BC 是圆内接 n 边形的一边 , 则 n 等于 ____ .



【答案】 12

【解析】 连 AO , BO , CO .

$\because AB$ 、 AC 为圆内接正六边形 , 正方形一边 .

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ , \angle AOC = 90^\circ .$$

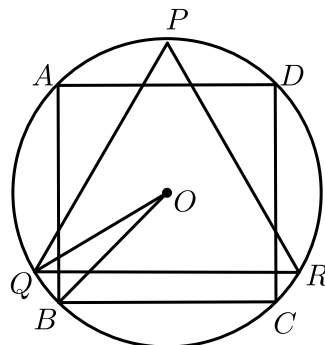
$$\therefore \angle BOC = 30^\circ .$$

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12 .$$

【标注】 【知识点】 正多边形的中心与中心角

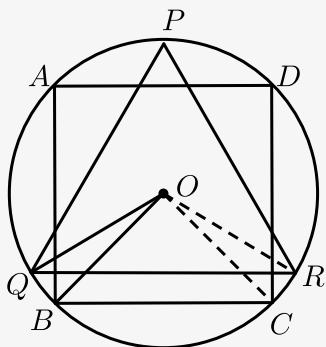
6. 2019~2020学年天津滨海新区初三上学期期末第16题3分 ★★

如图， $\triangle PQR$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接正方形， $BC \parallel QR$ ，则 $\angle BOQ$ 的度数是_____.



【答案】 15°

【解析】 如图所示，连接 OC ， OR ，



$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ,$$

$$\angle QOR = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ,$$

$\because BC \parallel QR$,

由对称性知 $\angle BOQ = \angle COR$,

$$\text{故 } \angle BOQ = \frac{120^\circ - 90^\circ}{2} = 15^\circ,$$

答案为 15° .

【标注】 【知识点】 圆内接正多边形相关计算

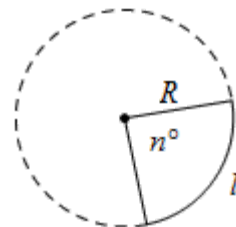
二、圆中的计算

1. 弧长公式

弧长公式： $l = \frac{n\pi R}{180}$ (n 为圆心角的度数， R 为圆的半径).

! 注意:

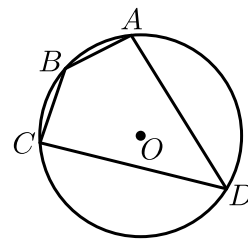
- ①圆心角的单位若不全是“度”，一定要化为“度”再代入公式；
②公式中的三个未知量 l 、 n 、 R 只要知道两个就可以求出第三个，从而可以推得圆心角的计算公式为： $n = \frac{180l}{\pi R}$ 。
③公式里的 180、 n 在弧长计算公式中表示倍分关系，没有单位。



栗子4

7. 2016年广东肇庆封开县初三中考一模第8题3分 ★★

如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\odot O$ 的半径为 2， $\angle B = 135^\circ$ ，则 $\widehat{AC}$ 的长（ ）。



A. 2π

B. π

C. $\frac{\pi}{2}$

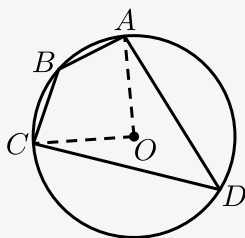
D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 B

【解析】 连接 OA 、 OC ，

$\because \angle B = 135^\circ$ ，

$\therefore$



$\angle D = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = 90^\circ$ ，

则 $\widehat{AC}$ 的长 $= \frac{90\pi \times 2}{180} = \pi$ 。

【标注】 【知识点】 弧长公式

栗子5

8. 2019年福建初三中考二模第14题4分 ★★

已知扇形的圆心角为 120° ，弧长为 4π ，则它的半径为 _____。

【答案】 6

【解析】 由扇形的弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ ，

得 $4\pi = \frac{120 \times \pi \times r}{180}$ ，

解得： $r = 6$.

故答案为： 6 .

【标注】【知识点】弧长公式

栗子6

9. 2018~2019学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第4题3分 ★★

已知 A, B 是 $\odot O$ 上的两点, $OA = 1$, 弧 AB 的长是 $\frac{1}{3}\pi$, 则 $\angle AOB$ 的度数是 () .

A. 30°

B. 60°

C. 90°

D. 120°

【答案】B

【解析】弧长公式： $l = \frac{n\pi r}{180^\circ}$,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$.

【标注】【能力】运算能力

【思想】数形结合思想

【知识点】弧长公式

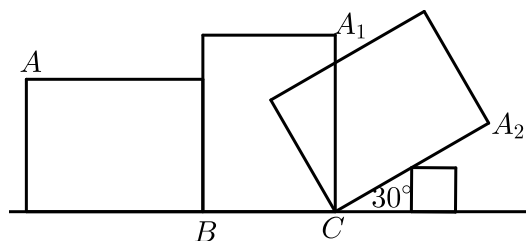
栗子7

10.

2020~2021学年江苏苏州姑苏区苏州市第十六中学校初三上学期单元测试《对称图形-圆》第8题3分

★★

如图, 一个长为 4cm 、宽为 3cm 的长方形木板在桌面上做无滑动的翻滚 (顺时针方向), 木板上点 A 位置的变化为 $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$, 其中第二次翻滚被桌面上一小木块挡住, 使木板与桌面成 30° 的角, 则点 A 滚到 A_2 位置时共走过的路径长为 () .



A. $\frac{7}{2}\pi\text{cm}$

B. $\frac{23}{6}\pi\text{cm}$

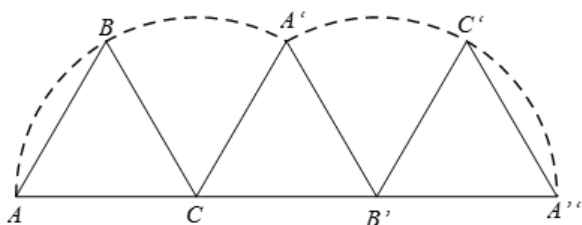
C. $\frac{4}{3}\pi\text{cm}$

D. $\frac{5}{2}\pi\text{cm}$

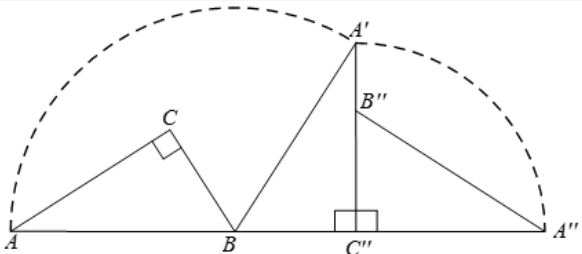
【备注】解决多边形滚动问题, 要明确旋转中心, 旋转半径、旋转方向以及旋转角度 .

常见的多边形滚动问题有:

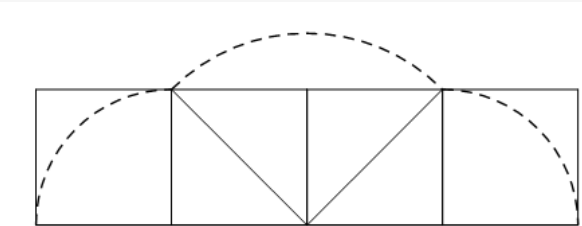
正三角形沿水平线翻滚:



直角三角形沿水平线翻滚：



正方形沿水平线翻滚：



各内角相等的正多边形沿水平线翻滚；

各内角不相等的多边形沿水平线翻滚。

【答案】 B

【解析】 $\because$ 长方形的长为 4cm ，宽为 3cm ，

$\therefore AB = 5\text{cm}$ ，

第一次是以 B 为旋转中心， BA 长 5cm 为半径旋转 90° ，

此次点 A 走过的路径是 $\frac{90\pi \times 5}{180} = \frac{5}{2}\pi (\text{cm})$ ，

第二次是以 C 为旋转中心， 4cm 为半径旋转 60° ，

此次走过的路径是 $\frac{60\pi \times 4}{180} = \frac{4}{3}\pi (\text{cm})$ ，

$\therefore$ 点 A 两次共走过的路径是 $\frac{5}{2}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{23}{6}\pi (\text{cm})$ 。

故选 B。

【标注】 【能力】 运算能力

【知识点】 旋转的性质

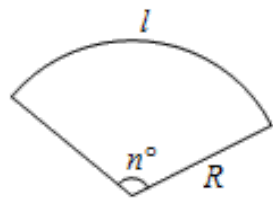
【知识点】 弧长公式

2. 扇形面积公式

扇形面积公式： $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ 。

利用扇形的弧长的计算公式有：

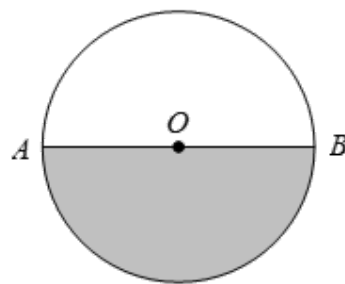
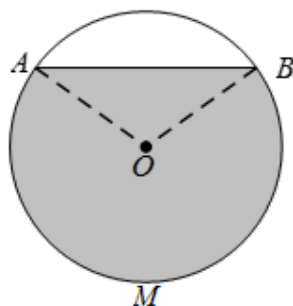
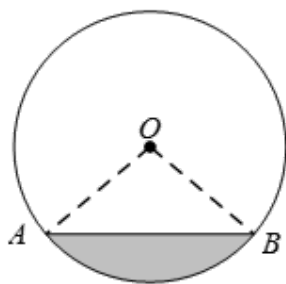
$$S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2} \times \frac{n\pi R}{180} \times R = \frac{1}{2}lR \quad . \quad (l \text{ 是这个扇形的弧长})$$



弓形面积：由弦及其所对的弧组成的图形．

弓形面积可以看做是 **扇形** 扇形面积和 **三角形** 面积的分解或组合．

根据弧的情况不同，分下三种情况：



①当弓形所含的弧是劣弧时， $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}OAB} - S_{\triangle AOB}$ ，

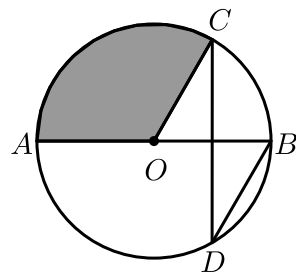
②当弓形所含的弧是优弧时， $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}OAMB} + S_{\triangle AOB}$ ，

③当弓形所含的弧是半圆时， $S_{\text{弓形}} = \frac{1}{2}S_{\text{圆}}$ ．

栗子8

11. 2019~2020学年河北石家庄栾城县初三上学期期末第10题2分 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 CD 交 AB 于点 E ，且 E 是 CD 的中点， $\angle CDB = 30^\circ$ ， $CD = 6\sqrt{3}$ ，则阴影部分面积为（ ）．



A. π

B. 3π

C. 6π

D. 12π

【答案】 D

【解析】 连接 BC ，

$$\because \angle CDB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 120^\circ,$$

$$\text{又} \because CO = BO,$$

$$\therefore \triangle COB \text{ 是等边三角形,}$$

$\therefore E$ 为 OB 的中点，

$\therefore CD \perp AB$ ，

$\therefore CD = 6\sqrt{3}$ ，

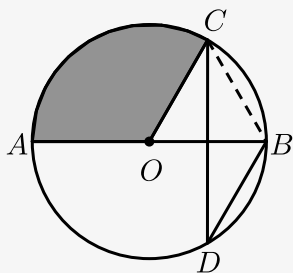
$\therefore EC = 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore \sin 60^\circ \times CO = 3\sqrt{3}$ ，

解得： $CO = 6$ ，

故阴影部分的面积为： $\frac{120\pi \times 6^2}{360} = 12\pi$ 。

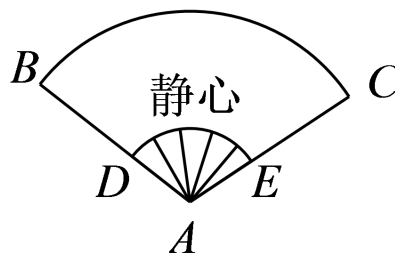
故答案为： 12π 。



【标注】【知识点】扇形的面积公式

12. 2016年山东青岛中考真题第7题3分 ★★★

如图，一扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB 和 AC 的夹角为 120° ，长为 25cm ，贴纸部分的宽 BD 为 15cm ，若纸扇两面贴纸，则贴纸的面积为（ ）。



A. $175\pi \text{ cm}^2$

B. $350\pi \text{ cm}^2$

C. $\frac{800}{3}\pi \text{ cm}^2$

D. $150\pi \text{ cm}^2$

【答案】B

【解析】 $\because AB = 25$ ， $BD = 15$ ，

$\therefore AD = 10$ ，

$\therefore S_{\text{贴纸}} = 2 \times \left(\frac{120 \times \pi \times 25^2}{360} - \frac{120 \times \pi \times 10^2}{360} \right) = 350\pi \text{ cm}^2$ 。

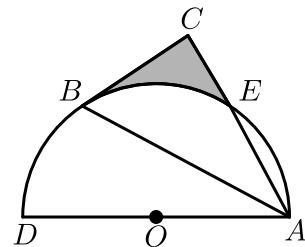
【标注】【知识点】扇形的面积公式

栗子9

阴影面积=大面积-小面积。

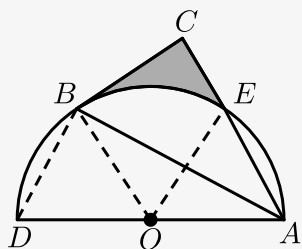
13. 2018~2019学年湖北襄阳市樊城区襄阳市第五中学初三上学期期末（培优班）第15题 ★★★

如图，以 AD 为直径的半圆 O 经过 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边的两个端点，交直角边 AC 于点 E 。 B 、 E 是半圆弧的三等分点，若 $OA = 2$ ，则图中阴影部分的面积为_____。



【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}$

【解析】 连接 OE, OB, DB ,



$\because BE$ 为三等分点,

$\therefore \angle BAC = 30^\circ = \angle BAD$.

$\because OA = 2$,

$\therefore DA = 4$,

$\therefore BA = 2\sqrt{3}$,

$\therefore BC = \sqrt{3}, CA = 3$,

$\therefore S_{\triangle BCA} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

又 $\because S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇}BOE} = S_{\text{阴}}, S_{\text{扇}BOE} = \frac{60 \times \pi \times 2^2}{360} = \frac{2\pi}{3}$,

$\therefore S_{\text{阴}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}$.

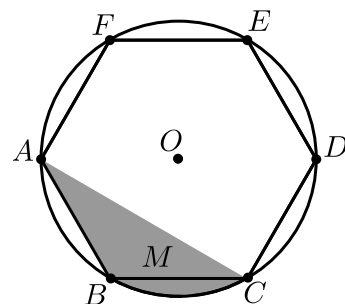
【标注】【知识点】扇形的面积公式

栗子10

14. 2018~2019学年广东广州越秀区广州市第七中学初三上学期中第15题3分 ★★★

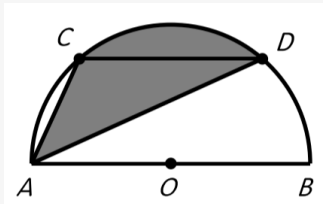
如图, $\odot O$ 的半径为 1cm , 正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$, 则图中阴影部分面积为 _____ cm^2 .

(结果保留 π)



【备注】遇到平行线，考虑“等积变形”。

例：如图， $CD \parallel AB$ ， $\odot O$ 的半径为 3， $\angle ADC = 25^\circ$ ，求阴影部分的面积。

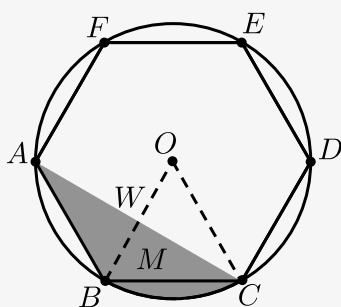


等积变形是求面积问题中常见的解题技巧。

例题中 $CD \parallel AB$ ，则在 AB 上任找一点，与 C 、 D 相连，得到的新三角形面积都与原来 $\triangle ACD$ 面积相同。最终连接 CO 、 DO ，原阴影面积就被转化为扇形 COD 的面积。

【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【解析】如图所示：连接 BO ， CO ，



$\because$ 正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，

$\therefore AB = BC = CO = 1$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\triangle OBC$ 是等边三角形，

$\therefore CO \parallel AB$ ，

在 $\triangle COW$ 和 $\triangle ABW$ 中

$$\begin{cases} \angle BWA = \angle CWO \\ \angle BAW = \angle COW, \\ AB = CO \end{cases}$$

$\therefore \triangle COW \cong \triangle ABW$ (AAS)，

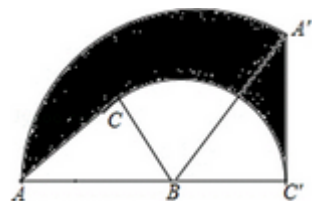
$\therefore$ 图中阴影部分面积为： $S_{\text{扇形}OBC} = \frac{60\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{6}$ 。

【标注】【知识点】圆内接正多边形相关计算

栗子11

15. ★★★★★

如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AB = 4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按顺时针方向转动一个角到 $\triangle A'BC'$ 的位置，使点 A 、 B 、 C' 在同一条直线上，则图中阴影部分的周长是（ ）



A. $4\pi + 4$ B. 4π C. $2\pi + 4$ D. 2π **【答案】** B**【解析】** $\because \text{Rt}\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ, BC = \frac{1}{2}AB = 2, AC = \sqrt{3}, BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ABA' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

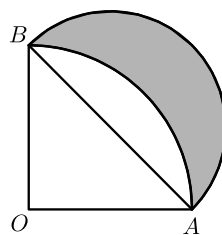
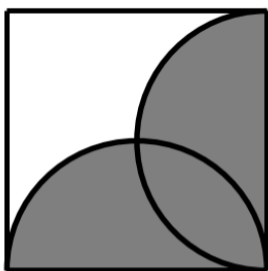
$$\therefore S_{\text{阴影}} = AB \text{扫过的扇形面积} - BC \text{扫过的扇形面积} = \frac{120\pi \times 4^2}{360} - \frac{120\pi \times 2^2}{360} = 4\pi$$

【标注】【知识点】扇形的面积公式

栗子12

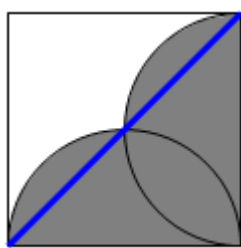
16. 2017~2018学年11月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第10题 ★★★

如图，扇形 AOB 的半径为 1， $\angle AOB = 90^\circ$ ，以 AB 为直径画半圆，则图中阴影部分的面积为（ ）。

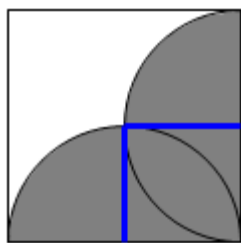
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$ D. $\frac{\pi}{3}$ **【备注】**遇到不规则阴影，可以分割为多个常见图形，再求面积和；关键在于阴影的划分上。**例：**如图，正方形边长为 2，以边长为直径作半圆，求图中阴影部分面积。

上面这道例题，

(1) 可以按正方形对角线连线，划分成几个三角形与弓形的组合。



(2) 也可以过中心向右向下做垂, 分割为一个正方形和两个小扇形, 计算时可将扇形拼成半圆, 算起来更容易一些.



【答案】A

【解析】扇形 AOB 的半径为 1, $\angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} \text{阴影部分的面积} &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{90\pi \times 1^2}{360} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故选 A.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】扇形的面积公式

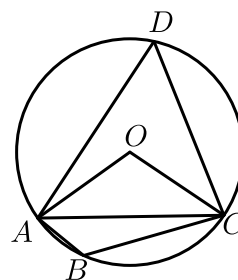
【知识点】与圆有关的不规则图形的周长与面积计算

独步天下

17. 2017~2018学年12月天津和平区天津市第二南开中学初三上学期月考第23题10分 ★★★

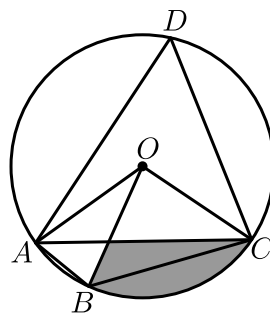
已知四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\angle ABC = 2\angle D$, 连接 OC 、 OA 、 AC .

(1) 如图①, 求 $\angle OCA$ 的度数.



图①

(2) 如图②, 连接 OB , OB 与 AC 相交于点 E , 若 $\angle COB = 90^\circ$, $OC = 2\sqrt{3}$, 求 BC 的长和阴影部分的面积.



图②

【答案】 (1) 30° .

(2) $BC = 2\sqrt{6}$, $3\pi - 2\sqrt{3}$.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形 ,

$$\therefore \angle ABC + \angle D = 180^\circ ,$$

$$\because \angle ABC = 2\angle D ,$$

$$\therefore \angle D + 2\angle D = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle D = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle D = 120^\circ ,$$

$$\because OA = OC ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 30^\circ .$$

(2) 方法一 : $\because \angle COB = 90^\circ$,

$$OB = OC , OC = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2\sqrt{6} ,$$

设 OB 与 AC 交于点 E ,

$$\because \angle OCA = 30^\circ , \angle EOC = 90^\circ ,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}EC ,$$

$$\because OC = 2\sqrt{3} , OC^2 + OE^2 = EC^2 ,$$

$$\therefore OE = 2 ,$$

$$\therefore S_{\triangle OEC} = \frac{OE \cdot OC}{2} = 2\sqrt{3} ,$$

$$\because S_{\text{扇形}OBC} = \frac{90\pi \cdot (2\sqrt{3})^2}{360} = 3\pi ,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 3\pi - 2\sqrt{3} .$$

方法二 : $\because \angle COB = 3\angle AOB$,

$$\therefore \angle AOC = \angle AOB + 3\angle AOB = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOB = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle COB = \angle AOC - \angle AOB = 90^\circ ,$$

在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中 , $OC = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore OE = OC \cdot \tan \angle OCE$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ \\
&= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 2, \\
\therefore S_{\triangle OEC} &= \frac{1}{2} OE \cdot OC \\
&= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3}, \\
\therefore S_{\text{扇形}OBC} &= \frac{90\pi \times (2\sqrt{3})^2}{360} = 3\pi, \\
\therefore S_{\text{阴影}} &= S_{\text{扇形}OBC} - S_{\triangle OEC} = 3\pi - 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】与圆有关的不规则图形的周长与面积计算

3. 圆锥侧面积公式

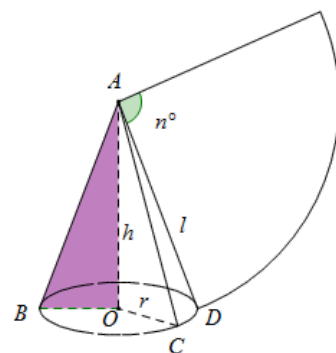
沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，得到圆锥的侧面展开图是一个扇形，那么这个扇形的 半径 就是圆锥的 母线 l ，扇形的 弧长 就是圆锥的 底面周长 $2\pi r$ ，因此：

①圆锥的侧面积为 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi rl$ ，

②圆锥的全面积为 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$ 。

③设这个展开的扇形圆心角为 n° ，圆锥的侧面积还可以表示为

$$S_{\text{侧}} = \frac{n\pi l^2}{360}.$$



栗子13

18. 2018~2019学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期期末第8题3分 ★★

圆锥体的高 $h = 2\sqrt{3}\text{cm}$ ，底面圆半径 $r = 2\text{cm}$ ，则圆锥体的全面积为（ ）。

- A. $4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$ B. $8\pi \text{ cm}^2$ C. $12\pi \text{ cm}^2$ D. $(4\sqrt{3} + 4)\pi \text{ cm}^2$

【答案】C

【解析】底面圆的半径为 2cm ，则底面周长 $= 4\pi \text{ cm}$ ，

$\therefore$ 底面半径为 2cm 、高为 $2\sqrt{3}\text{cm}$ ，

$\therefore$ 圆锥的母线长为 4cm ，

$\therefore$ 侧面面积 $= \frac{1}{2} \times 4\pi \times 4 = 8\pi(\text{cm}^2)$ ；

底面积 $= 4\pi \text{ cm}^2$ ，

$\therefore$ 全面积 $= 8\pi + 4\pi = 12\pi(\text{cm}^2)$ 。

【标注】【知识点】求圆锥的侧面积

19. 2020~2021学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第16题 ★★

已知圆锥的母线长 $AB = 6\text{cm}$ ，底面半径 $OB = 2\text{cm}$ ，则它的侧面展开扇形的圆心角为 _____ ° .

【答案】 120

【解析】 ∵圆锥的底面半径为 2cm ，

∴圆锥的底面周长为 4π ，

设扇形的圆心角为 n° ，

$$\therefore \frac{n\pi \times 6}{180} = 4\pi,$$

解得 $n = 120$.

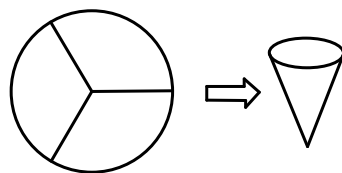
故圆锥的侧面展开图中扇形的圆心角为 120° .

故答案为：120 .

【标注】【知识点】求圆锥展开图扇形的圆心角

20. 2013年天津南开区初三中考一模第16题3分 ★★

如图，把一个半径为 12cm 的圆形硬纸片等分成三个扇形，用其中一个扇形制作成一个圆锥形纸筒的侧面（衔接处无缝隙且不重叠），则圆锥底面半径是 _____ cm .



【答案】 4

【解析】 ∵把一个半径为 12cm 的圆形硬纸片等分成三个扇形，

$$\therefore \text{扇形的弧长为：} \frac{1}{2} \times 2\pi r = 8\pi$$

∴扇形的弧长等于圆锥的底面周长，

$$\therefore 2\pi r = 8\pi,$$

解得： $r = 4\text{cm}$.

【标注】【知识点】求圆锥的底面半径

21. 2016~2017学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期期末第16题3分 ★★

已知扇形的半径为 10cm ，圆心角为 270° ，用它做成圆锥的侧面，则圆锥的高为 _____ cm .

【答案】 $\frac{5\sqrt{7}}{2}$

【解析】 $l_{\text{弧长}} = \frac{n\pi r}{180} = \frac{270 \times \pi \times 10}{180} = 15\pi$,

$$r_{\text{底}} = \frac{l_{\text{弧长}}}{2\pi} = \frac{15\pi}{2\pi} = \frac{15}{2} ,$$

设高为 h ,

$$h^2 + r_{\text{底}}^2 = R_{\text{母线}}^2 ,$$

$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{cm} .$$

【标注】【知识点】求圆锥的高